第 34 講　対称式について

34　次の各問いに答えよ．ただし，x，y，z は実数とする．

(1)　$x^2+xy+y^2=1$ を満たしているとき，$(x+1)(y+1)$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　$x^2+y^2+(z-2)^2=4$ と $x+y+2z=0$ を満たしているとき，z のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　$4x^2+8xy+9y^2=1$ を満たしているとき，$2x+3y+6xy$ のとり得る値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　対称式について

34　a，b は実数で

$$a^2+b^2=16,\quad a^3+b^3=44$$

を満たしている．このとき，$a+b$ の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　1　㋑　2　㋒　3

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　対称式について

34 次の各問いに答えよ．ただし，x，y，z は実数とする．

(1) $x^2+xy+y^2=1$ を満たしているとき，$(x+1)(y+1)$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ と $x+y+2z=0$ を満たしているとき，z のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) $4x^2+8xy+9y^2=1$ を満たしているとき，$2x+3y+6xy$ のとり得る値の範囲を求めよ．

【答】 (1) $-\dfrac{1}{4}\leqq(x+1)(y+1)\leqq\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}$　(2) $0\leqq z\leqq\dfrac{4}{3}$

(3) $-\dfrac{5}{3}\leqq 2x+3y+6xy\leqq\dfrac{3+2\sqrt{30}}{10}$

【解答】

(1) $x+y=s$，$xy=t$ とおくと，x と y は $\alpha^2-s\alpha+t=0$ の 2 つの実数解より $(-s)^2-4t\geqq 0$

$$\therefore\quad s^2-4t\geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

ここで $x^2+xy+y^2=1$ を変形すると $(x+y)^2-xy=1$ より $s^2-t=1$

$$\therefore\quad t=s^2-1$$

となるが，これを①に代入すると $s^2-4(s^2-1)\geqq 0$ よって

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\leqq s\leqq\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots②$$

を得る．

このとき

$$\begin{aligned}(x+1)(y+1)&=xy+(x+y)+1\\&=t+s+1=(s^2-1)+s+1\\&=s^2+s=\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

であることと，②より $-\dfrac{1}{4}\leqq s^2+s\leqq\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

ゆえに

$$\boldsymbol{-\frac{1}{4}\leqq(x+1)(y+1)\leqq\frac{4+2\sqrt{3}}{3}}$$

(2) $x+y=s$，$xy=t$ とおくと，x と y は $\alpha^2-s\alpha+t=0$ の 2 つの実数解より $(-s)^2-4t\geqq 0$

$$\therefore\quad s^2-4t\geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

ここで $x+y+2z=0$ より $x+y=-2z$

$$\therefore\quad s=-2z \quad \cdots\cdots②$$

$x^2+y^2+(z-2)^2=4$ を変形すると $(x+y)^2-2xy=4z-z^2$ より $s^2-2t=4z-z^2$ となるが，これと②より $t=\dfrac{5z^2-4z}{2}$ を得る．

これと②を①に代入すると $(-2z)^2-4\times\dfrac{5z^2-4z}{2}\geqq 0$ すなわち $2z(4-3z)\geqq 0$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって

$$\mathbf{0 \leqq z \leqq \frac{4}{3}}$$

(3)　$2x=X$，$3y=Y$ とおくことにより，$4x^2+8xy+9y^2=1$ は $X^2+\frac{4}{3}XY+Y^2=1$，

$2x+3y+6xy$ は $X+Y+XY$ と変形できる．

　ここで $X+Y=s$，$XY=t$ とおくと，X と Y は $\alpha^2-s\alpha+t=0$ の２つの実数解より

$(-s)^2-4t\geqq 0$

$$\therefore\quad s^2-4t\geqq 0 \quad\cdots\cdots①$$

　このとき，$X^2+\frac{4}{3}XY+Y^2=1$ は $(X+Y)^2-\frac{2}{3}XY=1$ と変形できるので $s^2-\frac{2}{3}t=1$

すなわち $t=\frac{3}{2}(s^2-1)$ となる．これを①に代入すると $s^2-4\times\frac{3}{2}(s^2-1)\geqq 0$ よって

$$-\sqrt{\frac{6}{5}}\leqq s\leqq\sqrt{\frac{6}{5}} \quad\cdots\cdots②$$

となる．

　ここで，$X+Y+XY=s+t=s+\frac{3}{2}(s^2-1)=\frac{3}{2}\left(s+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{5}{3}$ であることと，②より

$-\frac{5}{3}\leqq X+Y+XY\leqq\frac{3+2\sqrt{30}}{10}$

　ゆえに

$$\mathbf{-\frac{5}{3}\leqq 2x+3y+6xy\leqq\frac{3+2\sqrt{30}}{10}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第34講　対称式について

34　a，b は実数で

$$a^2+b^2=16,\quad a^3+b^3=44$$

を満たしている．このとき，$a+b$ の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　1　　㋑　2　　㋒　3

【答】　㋑

【解答】

$a+b=p$，$ab=q$ とおくと a と b は $X^2-pX+q=0$ の2つの実数解より

$$p^2-4q\geqq 0\quad\cdots\cdots①$$

このとき

$$\begin{cases} a^2+b^2=16 \\ a^3+b^3=44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2-2ab=16 \\ (a+b)(a^2+b^2-ab)=44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2-2q=16 & \cdots\cdots② \\ p(16-q)=44 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

ここで②より

$$q=\frac{1}{2}(p^2-16)$$

これを③，①へ代入すると

$$③より\quad p\left\{16-\frac{1}{2}(p^2-16)\right\}=44$$

$$p^3-48p+88=0$$

$$(p-2)(p^2+2p-44)=0$$

$$\therefore\quad p=2,\ -1\pm3\sqrt{5}\quad\cdots\cdots④$$

$$①より\quad p^2-4\cdot\frac{1}{2}(p^2-16)\geqq 0$$

$$p^2\leqq 32$$

$$\therefore\quad -4\sqrt{2}\leqq p\leqq 4\sqrt{2}\quad\cdots\cdots⑤$$

④，⑤より

$$p=2$$

ゆえに

$$a+b=\mathbf{2}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。